DOM MUNIUS

Les Échelles i-j

Générer des échelles harmoniques
à intervalles rationnels alternés

AEH

Atelier d'exploration harmonique

Sommaire

Données et conventions d'écriture.

On appellera i et j des intervalles rationnels : $i \in \mathbb{Q}$ et $j \in \mathbb{Q}$.

Par convention, on apellera i le petit intervalle *et* j le grand intervalle.

Soit r un nombre rationnel : $r \in \mathbb{Q}$.
$r = p/q$,
p et q étant des entiers naturels : $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$.

Soit k un entier naturel impair. Il représente le nombre de degrés de l'échelle dans le cas d'un échelle à nombre impair de degrés.

Générer des échelles i-j à trois degrés.

Les intervalles *i* et *j* sont générés par la formule suivante :

$$r \times \frac{2}{r^2} \times r = 2 \text{ (octave)}$$

Quel que soit *r*, le résultat de ce produit est toujours 2,
le r^2 en dénominateur réduisant les deux *r* en numérateurs.

Soient $\boldsymbol{i = (2/r^2)}$ et $\boldsymbol{j = r}$.
i et *j* sont bien des nombres rationnels, puisque *r* est rationnel.

i et *j* doivent être supérieurs à 1, donc :
$r > 1$,
$(2/r^2) > 1$, d'où : $r^2 < 2$, c'est-à-dire : $r < \sqrt{2}$.

$$\mathbf{1 < r < \sqrt{2}}$$
$$\mathbf{1 < r < 1{,}4142}$$

Exemples : 4/3 ou 6/5 conviennent, parmi d'autres.

Si $r = 4/3$,
alors : $i = (2/r^2) = 9/8$ et $j = r = 4/3$.
i et *j* généreront l'échelle suivante (en ratios) :

[1/1] [4/3] [3/2] [2/1]

Si $r = 6/5$,
alors : $i = r = 6/5$ et $j = (2/r^2) = 25/18$.
i et *j* généreront l'échelle suivante (en ratios) :

[1/1] [6/5] [5/3] [2/1]

Voici comment arriver à la formule des intervalles, après deux divisions de l'octave :

r		2/r
2/r	r²/2	2/r
j	*i*	*j*

Générer des échelles i-j à cinq degrés.

Les intervalles *i* et *j* sont générés par la formule suivante :

$$\frac{r^2}{2} \times \frac{2^2}{r^3} \times \frac{r^2}{2} \times \frac{2^2}{r^3} \times \frac{r^2}{2} = 2 \text{ (octave)}$$

Quel que soit r, le résultat de ce produit est toujours 2,
les deux r^3 en dénominateur réduisant les trois r^2 en numérateurs.

Soient $\boldsymbol{i = (r^2/2)}$ et $\boldsymbol{j = (2^2/r^3)}$.

i et j doivent être supérieurs à 1, donc :
$(r^2/2) > 1$, d'où : $r^2 > 2$, c'est à dire : $r > \sqrt{2}$.
$(2^2/r^3) > 1$, d'où : $r^3 < 2^2$, c'est-à-dire : $r < \sqrt[3]{(2^2)}$, soit $r < \sqrt[3]{4}$.

$$\boldsymbol{\sqrt{2} < r < \sqrt[3]{4}}$$
$$\boldsymbol{1{,}4142 < r < 1{,}5874}$$

Exemple : $r = 3/2$ convient, parmi d'autres.

Si $r = 3/2$,
alors : $i = (r^2/2) = 9/8$ et $j = (2^2/r^3) = 32/27$.
i et j généreront l'échelle suivante (en ratios) :
[1/1] [9/8] [4/3] [3/2] [16/9] [2/1].

Voici comment arriver à la formule des intervalles, après trois divisions de l'octave :

<table>
<tr><td colspan="3">r</td><td colspan="2">2/r</td></tr>
<tr><td colspan="2">2/r</td><td>r²/2</td><td colspan="2">2/r</td></tr>
<tr><td>r²/2</td><td>2²/r³</td><td>r²/2</td><td>2²/r³</td><td>r²/2</td></tr>
<tr><td>i</td><td>j</td><td>i</td><td>j</td><td>i</td></tr>
</table>

Générer des échelles i-j à sept degrés.

Les intervalles *i* et *j* sont générés par la formule suivante :

$$\frac{r^3}{2^2} \times \frac{2^3}{r^4} \times \frac{r^3}{2^2} \times \frac{2^3}{r^4} \times \frac{r^3}{2^2} \times \frac{2^3}{r^4} \times \frac{r^3}{2^2} = 2 \text{ (octave)}$$

Quel que soit r, le résultat de ce produit est toujours 2,
les trois r^4 en dénominateur réduisant les quatre r^3 en numérateurs.

Soient $\boldsymbol{i = (2^3/r^4)}$ et $\boldsymbol{j = (r^3/2^2)}$.

i et *j* doivent être supérieurs à 1, donc :
$(r^3/2^2) > 1$, d'où : $r^3 > 2^2$, c'est à dire : $r > \sqrt[3]{(2^2)}$, soit : $r < \sqrt[3]{4}$.
$(2^3/r^4) > 1$, d'où : $r^4 < 2^3$, c'est-à-dire : $r < \sqrt[4]{(2^3)}$, soit : $r < \sqrt[4]{8}$.

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{4} < r < \sqrt[4]{8}}$$
$$\boldsymbol{1{,}5874 < r < 1{,}68179}$$

Exemple : 5/3 convient, parmi d'autres (8/5, 13/8, 18/11, 21/13...)
Si $r = 5/3$,
alors : $i = (2^3/r^4) = 648/625$ et $j = (r^3/2^2) = 125/108$.

i et *j* généreront l'échelle suivante (en ratios) :
[1/1] [125/108] [6/5] [25/18] [36/25] [5/3] [216/125] [2/1]

Voici comment arriver à la formule des intervalles, après quatre divisions de l'octave :

<table>
<tr><td colspan="5">r</td><td colspan="2">$2/r$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2/r$</td><td colspan="3">$r^2/2$</td><td colspan="2">$2/r$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2/r$</td><td colspan="2">$2/r$</td><td>$r^3/2^2$</td><td colspan="2">$2/r$</td></tr>
<tr><td>$r^3/2^2$</td><td>$2^3/r^4$</td><td>$r^3/2^2$</td><td>$2^3/r^4$</td><td>$r^3/2^2$</td><td>$2^3/r^4$</td><td>$r^3/2^2$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{j}$</td><td>$\boldsymbol{i}$</td><td>$\boldsymbol{j}$</td><td>$\boldsymbol{i}$</td><td>$\boldsymbol{j}$</td><td>$\boldsymbol{i}$</td><td>$\boldsymbol{j}$</td></tr>
</table>

Générer des échelles i-j à k (impair) degrés.

De l'observation des cas précédents, on peut tirer des formules générales concernant les intervalles *i* et *j* et la condition à respecter pour *r* en fonction du nombre *k* (impair) de degrés des échelles.

Pour un nombre *k* de degrés :

$$2^{((k-3)/2)/((k-1)/2)} < r < 2^{((k-1)/2)/((k+1)/2)}$$

$$i = r^{(k-1)/2} / 2^{(k-3)/2}$$

$$j = 2^{(k-1)/2} / r^{(k+1)/2}$$

Les intervalles rationnels *i* et *j* découlant d'un nombre rationnel *r* respectant cet encadrement généreront une échelle *i-j* à *k* (impair) degrés.

Générer des échelles i-j à huit degrés.

On arrive à huit degrés en faisant quatre divisions successives de l'octave.

```
  I |                j1               |        i1         |
 II |        j2         |      i2     |        j2         |    (j2 = i1)
III | i3 |     j3       |      j3     | i3 |     j3       |    (j3 = i2)
 IV | i4 |   j4    | i4 |  j4    | i4 | i4 |  j4    | i4 |    (i4 = i3)
```

Formule des intervalles :

<table>
<tr><td colspan="5">r</td><td colspan="3">2/r</td></tr>
<tr><td colspan="3">2/r</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="3">2/r</td></tr>
<tr><td>$2^2/r^3$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td>$2^2/r^3$</td></tr>
<tr><td>$2^2/r^3$</td><td>$r^5/2^3$</td><td>$2^2/r^3$</td><td>$r^5/2^3$</td><td>$2^2/r^3$</td><td>$2^2/r^3$</td><td>$r^5/2^3$</td><td>$2^2/r^3$</td></tr>
<tr><td>***i***</td><td>***j***</td><td>***i***</td><td>***j***</td><td>***i***</td><td>***i***</td><td>***j***</td><td>***i***</td></tr>
</table>

$$\frac{4}{r^3} \times \frac{r^5}{8} \times \frac{4}{r^3} \times \frac{r^5}{8} \times \frac{4}{r^3} \times \frac{4}{r^3} \times \frac{r^5}{8} \times \frac{4}{r^3} = 2 \text{ (octave)}$$

$$\boldsymbol{i = 4/r^3} \text{ et } \boldsymbol{j = r^5/8}$$

i > 1 et j > 1,
d'où : $8 < r^5$ et $r^3 < 4$.

$$\sqrt[5]{8} < r < \sqrt[3]{4}$$

$$\mathbf{1{,}5157 < r < 1{,}5874}$$

Exemple : $r = 14/9 = 1{,}555...$ convient, entre autres.

Si $r = 14/9$,
alors : $i = (2^2/r^3) = 729/686$ et $j = (r^5/2^3) = 67228/59049$

i et *j* généreront l'échelle suivante (en ratios) :

[1/1] [729/686] [98/81] [9/7] [9604/6561] [14/9] [81/49] [1372/729][2/1]

Générer des échelles i-j à douze degrés.

On arrive à douze degrés en faisant cinq divisions successives de l'octave.

```
  I |              j1                 |          i1             |
 II |   i2    |         j2            |          j2             |     (j2 = i1)
III |   i3    |      j3      |   i3   |       j3      |   i3    |     (i3 = i2)
 IV |   j4    | i4|    j4    |   j4   | i4|    j4     |   j4    |     (j4 = i3)
  V | i5| j5  | i5| j5  | i5| j5  | i5| i5| j5  | i5| j5  | i5|     (i5 = i4)
```

Formule des intervalles :

<table>
<tr><td colspan="7">r</td><td colspan="5">2/r</td></tr>
<tr><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="5">2/r</td><td colspan="5">2/r</td></tr>
<tr><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="3">$2^2/r^3$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="3">$2^2/r^3$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$r^2/2$</td><td>$2^3/r^5$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td>$2^3/r^5$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td><td colspan="2">$r^2/2$</td></tr>
<tr><td>$2^3/r^5$</td><td>$r^7/2^4$</td><td>$2^3/r^5$</td><td>$r^7/2^4$</td><td>$2^3/r^5$</td><td>$r^7/2^4$</td><td>$2^3/r^5$</td><td>$2^3/r^5$</td><td>$r^7/2^4$</td><td>$2^3/r^5$</td><td>$r^7/2^4$</td><td>$2^3/r^5$</td></tr>
<tr><td>*i*</td><td>*j*</td><td>*i*</td><td>*j*</td><td>*i*</td><td>*j*</td><td>*i*</td><td>*i*</td><td>*j*</td><td>*i*</td><td>*j*</td><td>*i*</td></tr>
</table>

$$\frac{8}{r^5} \times \frac{r^7}{16} \times \frac{8}{r^5} \times \frac{r^7}{16} \times \frac{8}{r^5} \times \frac{r^7}{16} \times \frac{8}{r^5} \times \frac{8}{r^5} \times \frac{r^5}{8} \times \frac{8}{r^5} \times \frac{r^7}{16} \times \frac{8}{r^5} = 2 \text{ (octave)}$$

$$\boldsymbol{i = 8/r^5} \text{ et } \boldsymbol{j = r^7/16}$$

i > 1 et j > 1,

d'où : $16 < r^7$ et $r^5 < 8$.

$$\sqrt[7]{16} < r < \sqrt[5]{8}$$

$$\mathbf{1{,}48599 < \boldsymbol{r} < 1{,}5157}$$

Exemple : $r = 3/2 = 1{,}5$ convient, entre autres.

Si $r = 3/2$,

alors $i = 2^3/r^5 = 256/243$ et $j = r^7/2^4 = 2187/2048$

i et *j* généreront l'échelle suivante (en ratios) :

[1/1] [256/243] [9/8] [32/27] [81/64] [4/3] [729/512] [3/2] [128/81] [27/16] [16/9] [243/128] [2/1]